Konvoluční model dynamických studií ledvin

Ondřej Tichý

seminář AS UTIA

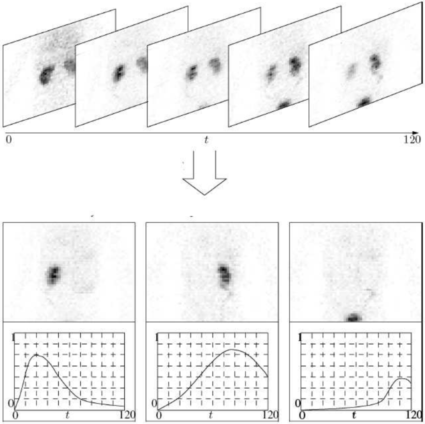
25.10.2010

Obsah prezentace

- Scintigrafická obrazová sekvence a její analýza
- Konstrukce standardního modelu a jeho řešení
- Experiment 1
- Konvoluční parametrizace a integrální model
- Ovlivnění výpočtu pomocí apriorna
- Experiment 2
- Experiment 3

Scintigrafická obrazová sekvence a její analýza

Schéma



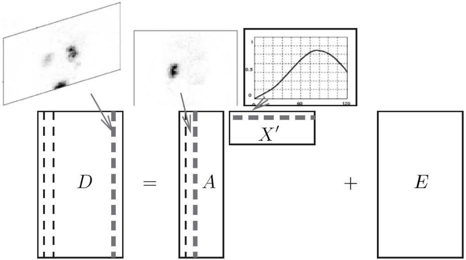
Konstrukce standardního modelu a jeho řešení

Základní tvar modelu faktorové analýzy

Základní model má tvar:

$$D = AX' + E\,, \tag{1}$$

kde $A \in \mathbf{R}^{p \times r}$, $X \in \mathbf{R}^{n \times r}$ a $E \in \mathbf{R}^{p \times n}$.



Konstrukce standardního modelu a jeho řešení

Apriorní předpoklady:

- šum měření je stejný na všech pixelech na všech obrázcích
- pixely faktorových obrázků jsou nezávisle rozložené, avšak se stejnou variancí pro každý obrázek

Matematicky formulováno:

$$f(D|A,X,\omega) = N_D\left(AX', \omega^{-1} I_p \otimes I_n\right). \tag{2}$$

$$f(A|\Upsilon) = N_A\left(\mathbf{0}_{p,r}, I_p \otimes \Upsilon^{-1}\right) \tag{3}$$

$$f(X) = N_X\left(\mathbf{0}_{n,r}, I_n \otimes I_r\right). \tag{4}$$

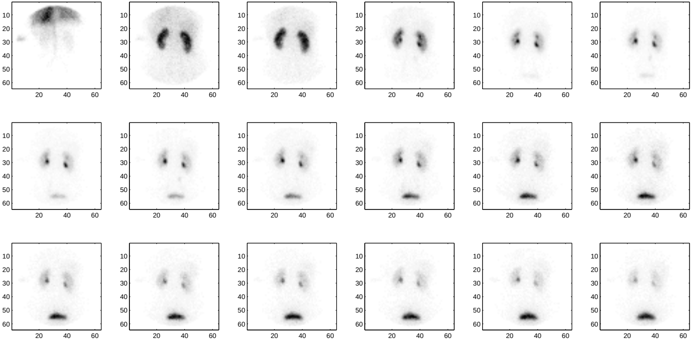
Cílem je odhadnout matice A a X z datové matice D.

Konstrukce standardního modelu a jeho řešení

- model řešíme Variační Bayesovskou metodou, pomocí které se dostaneme k soustavě rovnic (VB-teorém: $\tilde{f}(\theta_i|D) \propto \exp\left(E_{\tilde{f}(\theta_{/i}|D)}[\ln(f(\theta, D))]\right)$)
- k řešení soustavy užijeme iterační algoritmus, který implementujeme v Matlabu

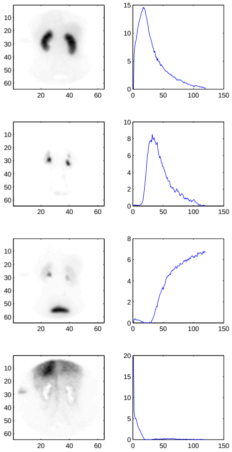
Konstrukce standardního modelu a jeho řešení

Experiment 1



Konstrukce standardního modelu a jeho řešení

Experiment 1



Konvoluční parametrizace a integrální model

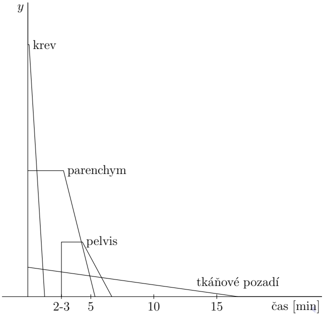
Motivace: v praxi snaha získat jedno číslo (diagnostický koeficient). Metody:

- Patlak-Rutland plot (nepřesné a závislé na lidském faktoru)
- získáním tzv. tranzitního času (určení konvolučního jádra faktoru)
- přesným určením faktorových obrázků parenchymů a výpočtem jejich relativní intenzity (tzv. relativní renální clearance)

Konvoluční parametrizace a integrální model

Standardní model neodpovídá reálnému biologickému systému:

- pozorovaná křivka je výsledkem konvoluce aktivity v krvi a jednotlivých faktorů
- konvoluční jádra jsou klesající a nezáporná (viz obrázek)
  Tyto předpoklady v základním modelu nejsou.



Konvoluční parametrizace a integrální model

Konvoluční parametrizace křivek

Máme model tvaru $D = AX' + E$, kde $A \in \mathbf{R}^{p\times r}$ a $X \in \mathbf{R}^{n\times r}$. Prvky matice X však modelujeme jako:

$$x_{t,f} = \sum_{o=1}^{t} b_{t-o+1} u_{o,f}, \tag{5}$$

kde

$$u_{o,f} = \sum_{\phi=o}^{n} w_{\phi,f} \quad \text{a} \quad b_s = \sum_{\varsigma=s}^{n} g_{\varsigma}, \tag{6}$$

čímž zajistíme pozitivitu a monotonii b a u_f.

Konvoluční parametrizace a integrální model

Zabudování apriorní znalosti přírůstkové matice W

$$w_{i,f} = \begin{cases} h_f & i \in \mathcal{H} \\ 0 & jinak \end{cases}, \tag{7}$$

kde $\mathcal{H}$ je spojitá indexová množina. Apriorní rozdělení jednoho sloupce matice W je pak

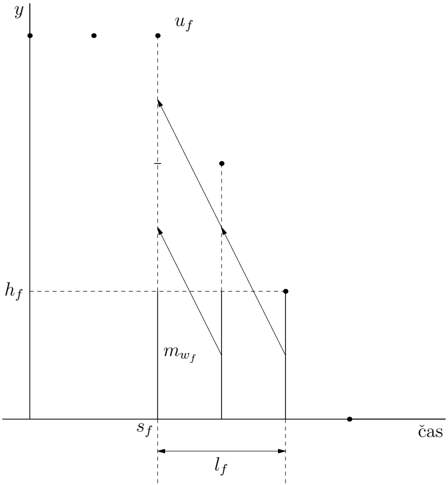
$$f(w) = N(m_w(\mathcal{H}), \xi_w^{-1} I_n) \tag{8}$$

a celkově

$$f(W) = N(M_W, I_n \otimes \Xi_W^{-1}). \tag{9}$$

Konvoluční parametrizace a integrální model

Zabudování apriorní znalosti přírůstkové matice *W*



Konvoluční parametrizace a integrální model

Zabudování pravděpodobnostní masky na faktorových obrázcích

Snaha určit, zda daný pixel k faktoru patří či nikoliv:

$$(z_{a_f})_i = \begin{cases} c_{f,i} & i \in \mathcal{C} \\ 0 & jinak \end{cases}. \tag{10}$$

Apriorno jednoho sloupce matice A určíme jako:

$$f(a) = N(z_a, \upsilon^{-1} I_p) \tag{11}$$

a matice A, jejíž sloupce se skládají z vektorů a má apriorní rozdělení:

$$f(A) = N(Z_A, I_p \otimes \Upsilon_A^{-1}). \tag{12}$$

Konvoluční parametrizace a integrální model

Řešení

- model opět řešíme Variační Bayesovskou metodou
- odvozeny metody pro udržení výpočtu v maticové (popř. vektorové) formě
- odvozeny algoritmy pro odhad indexové množiny $\mathcal{H}$, pravděpodobností Z_A a příslušných aprioren pomocí EM algoritmu
- výslednou soustavu rovnic řešíme iteračně v Matlabu

Konvoluční parametrizace a integrální model

Rovnice pro křivky, ukázka

Původní rovnice:

$$\Sigma_X = \left(\widehat{\omega}\widehat{A'A} + I_r\right)^{-1}$$

$$\mu_X = \widehat{\omega}D'\widehat{A}\left(\widehat{\omega}\widehat{A'A} + I_r\right)^{-1}$$

Nynější rovnice:

$$\Sigma_g = (\widehat{\psi}I_n + \widehat{\omega}C'\sum_{i,j=1}^{r}\left(\widehat{a_i'a_j}\sum_{k,l=0}^{n-1}\Delta_k'\Delta_l(\widehat{u_{k+1,j}u_{l+1,i}})\right)C)^{-1}$$

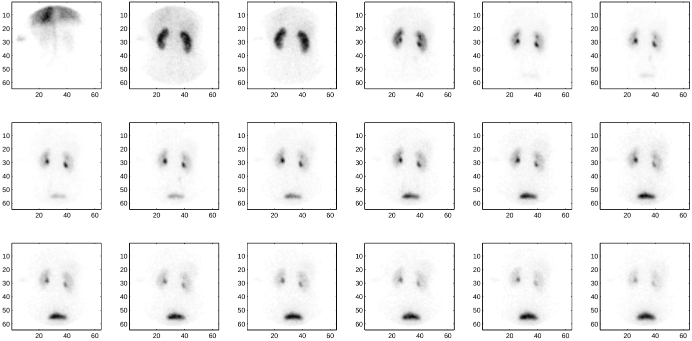
$$\mu_g = \widehat{\omega}\Sigma_g C'\sum_{i=1}^{r}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k'\widehat{u_{k+1,i}}\right)D'\widehat{a}_i\right)$$

$$\Sigma_{\mathrm{vec}(W)} = \left(((\widehat{A'A})' \otimes \widehat{\omega}C'\widehat{B'B}C) + (\widehat{\Xi_W} \otimes I_n)\right)^{-1}$$

$$\mu_{\mathrm{vec}(W)} = \Sigma_{\mathrm{vec}(W)}((\widehat{A'A})' \otimes \widehat{\omega}C'\widehat{B'B}C)\,\mathrm{vec}(\mu_W^{(1)}) + \\ + \Sigma_{\mathrm{vec}(W)}(I_n \otimes \widehat{\Xi_W})\,\mathrm{vec}(\mu_W^{(2)})$$

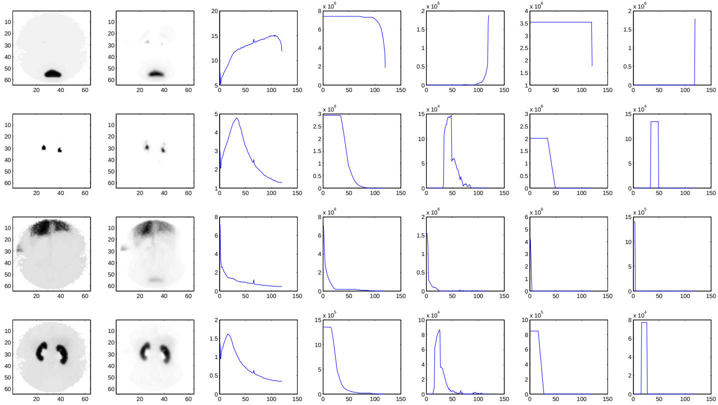
Konvoluční parametrizace a integrální model

Experiment 2



Konvoluční parametrizace a integrální model

Experiment 2



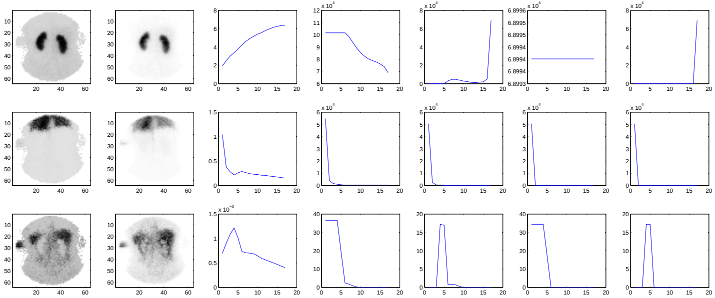
Konvoluční parametrizace a integrální model

Přímý výpočet relativní renální clearance

- předpoklady modelu jsou zcela splněny pouze v první fázi sekvence, před aktivací pánvičky
- z analýzy celé sekvence určíme "počáteční fázi"
- vyhneme se problémům s počáteční nulovou fází pánvičky, přesněji určíme parenchymy

Konvoluční parametrizace a integrální model

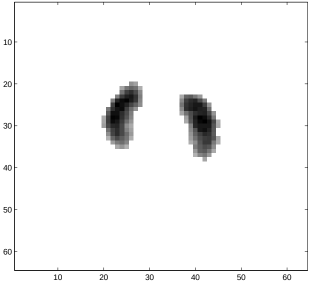
Experiment 2



Konvoluční parametrizace a integrální model

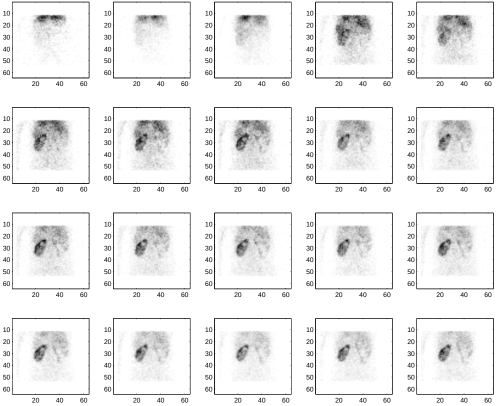
Experiment 2

Pixely parenchymů pravděpodobnější než 50%:



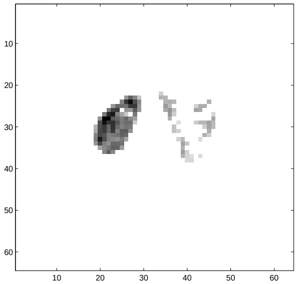
Konvoluční parametrizace a integrální model

Experiment 3



Konvoluční parametrizace a integrální model

Experiment 3



Konvoluční parametrizace a integrální model

Závěr

Povedlo se:

- zabudovat konvoluci do faktorové analýzy
- celý model dopočítat a odladit algoritmus
- automaticky určit relativní renální clearance

Další směry:

- zabudovat větší flexibilitu konvolučních jader
- lépe aproximovat šum (odhadovat kovarianční matice šumu na křivkách i obrázcích)
- řešení patologických situací