

Problém optimálního růstu mikrořasy a jeho analýza na dlouhodobém časovém horizontu

Sergej Čelikovský

ÚTIA AV ČR, v.v.i.

22.11.2011

Obsah

- 1 Úvod
- 2 Princip maxima Pontrjagina
- 3 Model růstu mikrořasy a jeho vlastnosti
- 4 Optimální řízení produkce mikrořasy
- 5 Závěr

Princip maxima Pontrjagina

Úloha s volným pravým koncem na pevném časovém úseku

Tvrzení

Nechť u^{opt} je optimální řízení minimalizující kritérium J , dané jako:

$$\dot{x} = f(x, u), x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m,$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u) dt + \phi(x(t_f)), x(t_0) = x^0, x(t_f) \in \mathbb{R}^n,$$

kde $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t_0 < t_f$ a kompaktní U jsou dána a nechť $x^{opt}(t)$, $x^{opt}(0) = x^0$, je odpovídající stavová trajektorie. Potom $\exists \psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]^T \neq 0$ takové, že platí $\forall t \in [t_0, t_f]$:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial f_0}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt})^T - \frac{\partial f}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt})^T \psi, \quad \psi(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t_f)),$$

$$\max_{u \in U} \left[-f_0(x^{opt}(t), u) + \psi^T(t) f(x^{opt}(t), u) \right] =$$

$$\left[-f_0(x^{opt}(t), u^{opt}(t)) + \psi^T(t) f(x^{opt}(t), u^{opt}(t)) \right].$$

Princip maxima Pontrjagina

Úloha s volným pravým koncem na pevném časovém úseku

Bez ztráty obecnosti můžeme brát $\phi \equiv 0$, neboť

$$\phi(x(t_f)) = \phi(x_0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x} dt = \phi(x_0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, u) dt,$$

a protože $\phi(x_0)$ je jednoznačně dáno, stačí tedy zaměnit $f_0(x, u)$ za

$$\tilde{f}_0(x, u) := f_0(x, u) + \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, u)$$

a adjugovaný stav $\psi(t)$, $\psi(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t_f))$ za adjugovaný stav

$$\tilde{\psi}(t) := \psi + \frac{\partial \phi}{\partial x}(t), \quad \tilde{\psi}(t_f) = 0, \text{ neboť}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\psi}} &= \dot{\psi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} f(x, u) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} f(x, u) + \frac{\partial f_0}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt})^\top - \frac{\partial f}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt})^\top \tilde{\psi} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt})^\top \frac{\partial \phi}{\partial x}(t) = \frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt})^\top - \frac{\partial f}{\partial x}(u^{opt}, x^{opt})^\top \tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Princip maxima Pontrjagina

Úloha s volným pravým koncem na pevném časovém úseku

Ekvivalentní problém:

pro dané t_0, t_f, x^0, U , nalézt $T_0 < T_f \in \mathbb{R}$ a měřitelné $u^{opt}(t) \in U, t \in [T_0, T_f]$, které minimalizuje $x_0(T_f)$, kde:

$$\dot{x}_0 = f_0(x, u), \dot{x} = f(x, u), \dot{x}_{n+1} = 1, [x_0, x, x_{n+1}](T_0) = (0, x^0, t_0), \\ [x_0, x, x_{n+1}](T_f) \in \{\tilde{x} = [\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{x}_{n+1},] \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \tilde{x}_{n+1} = t_f\}.$$

Použijeme princip maxima Pontrjagina (PMP) z knihy

[PBG] *Pontrjagin, Boltjanskij, Gamkrelidze, Miščenko:*

*Matematičeskja teorija optimal'nych procesov*¹.

¹1961, Fizmatgiz; 1962, Wiley; 1964, Praha, SNTL; 1964, Pergamon Press; 1964 Berlín, Dt. Verl. Wiss., N; 1966, Tokyo, J; 1967 Vídeň a Mnichov, N; 1968 Varšava; 1969 Moskva, Nauka, 2hé vydání; 1976 3tí; 1983 4té; 1978 Moskva, Nauka, F.

Princip maxima Pontrjagina

Úloha s volným pravým koncem na pevném časovém úseku

Podle Věty 3 v [PBGM] z optimality $u^{opt}(t) \in U, t \in [T_0, T_f]$, s volnými $T_0 < T_f$, plyne existence $\bar{\psi}(t) \neq 0$, kde

$$(1) \quad \dot{\psi}_0 = 0, \quad \dot{\psi} = - \left[\frac{\partial f_0}{\partial x} \right]^\top \psi_0 - \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]^\top \psi, \quad \dot{\psi}_{n+1} = 0$$

$$(2) \quad \bar{\psi} := [\psi_0, \psi, \psi_{n+1}]^\top, \quad \psi(T_f) = 0,$$

takové, že platí

$$(3) \quad H(\bar{\psi}(t), u^{opt}(t), x^{opt}(t)) = \max_{u \in U} H(\bar{\psi}(t), u, x^{opt}(t))$$

$$(4) \quad \psi_0(T_f) \leq 0, \quad H(\bar{\psi}(T_f), u^{opt}(T_f), x^{opt}(T_f)) = 0,$$

kde $H := \psi_0 f_0 + \psi^\top f + \psi_{n+1}$ je Hamiltonián rozšířeného systému.

Princip maxima Pontrjagina

Úloha s volným pravým koncem na pevném časovém úseku

Pomocí (2) máme, že podmínky (4) jsou ekvivalentní

$$\psi_{n+1}(T_f) + \psi_0(T_f)f_0(T_f) = 0, \quad \psi_0(T_f) \leq 0,$$

Protože $\psi_0(T_f) = 0 \Rightarrow \bar{\psi}(t) \equiv 0$, což odporuje PMP, musí díky (1,2) dokonce platit, že

$$(5) \quad \psi_{n+1}(T_f) + \psi_0(T_f)f_0(T_f) = 0, \quad \psi_0(T_f) < 0,$$

Protože $\psi_0(T_f) < 0$, rovnost v (5) je splněna volbou $\psi_{n+1}(T_f)$.

Díky homogenitě adjugované rovnice (1) a Hamiltoniánu $H := \psi_0 f_0 + \psi^\top f + \psi_{n+1}$ vzhledem k $\bar{\psi} = [\psi_0, \psi, \psi_{n+1}]^\top$, musí existovat také řešení s $\psi_0(T_f) = -1 \Rightarrow \psi_0(t) \equiv -1$.

Podmínky (1,2,3,4) tak přejdou v podmínky Tvzení.

Model růstu mikrořasy a jeho vlastnosti

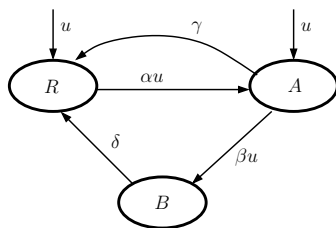


Figure: Schéma Eilers-Peetersova fenomenologického modelu fotosyntézy.

- “A” aktivovaný stav;
- “B” inhibovaný stav;
- “R” odpočívající (resting) stav.

Model růstu mikrořasy a jeho vlastnosti

Nechť x_A, x_B, x_R , $x_A + x_B + x_R = 1$, jsou pravděpodobnosti, či poměrné koncentrace, příslušných stavů, x_A, x_B přímo měřitelné.

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} -(\alpha + \beta) & -\alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + u(t) \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(7) \quad J = \kappa \gamma (t_f - t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} x_A(t) dt.$$

(8) $x_{A_{ss}} = \alpha \delta u \lambda_F^{-1} \lambda_S^{-1}$, $x_{B_{ss}} = \alpha \beta u^2 \lambda_F^{-1} \lambda_S^{-1}$,
zde $\lambda_{F,S} < 0$ jsou příslušná vlastní čísla matice na pravé straně (6) s konstantním vstupem.

$$(9) \quad u_{opt_{ss}} = \gamma^{1/2} \delta^{1/2} \alpha^{-1/2} \beta^{-1/2}, \quad u^* := u / u_{opt_{ss}}.$$

Biologická konzistentnost modelu

Model (6) je přijatelný z biologického hlediska také proto, že oblast, ve které jeho stavy dávají biologický smysl, je invariantní. Tato oblast je dána podmínkami, že x_A, x_B jsou nezáporné a jejich součet nesmí být větší než 1, neboť také hodnota $x_R = 1 - x_A - x_B$ je nezáporná. Proto je důležité, že platí následující Tvrzení.

Tvrzení

Nechť

$$(10) \quad \Delta^1 := \left\{ [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}.$$

Potom, Δ^1 je invariantní v čase směrem dopředu množinou systému (6) pro každou měřitelnou a kladnou funkci $u(t)$.

Přehlednější parametrizace

Model (6-7) přepíšeme pomocí vhodnější parametrizace

$$q_1 := \sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}}, q_2 := \sqrt{\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta}} \frac{1}{\alpha + \beta}, q_3 := \kappa\gamma \sqrt{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}, q_4 := \alpha q_1, q_5 := \frac{\beta}{\alpha},$$

které spolu s již zavedeným $u^* := u/u_{opt_{ss}}$ vedou na:

$$(11) \quad \frac{1}{q_4} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_2(1 + q_5) & 0 \\ 0 & \frac{q_5}{q_2(1 + q_5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} - u^* \begin{bmatrix} (1 + q_5) & 1 \\ -q_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^* \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(12) \quad J = q_2 q_3 (1 + q_5) (t_f - t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} x_A(t) dt.$$

Přehlednější parametrizace

q_1 v $\mu\text{E m}^{-2}\text{s}^{-1}$, q_2 , q_5 bezrozměrné, q_3 , q_4 v s^{-1} ;

q_1, q_2 - vlastnosti ustáleného stavu systému;

q_3 ovlivňuje jen měřítko produkce;

$q_1 := u_{opt_{ss}}$ (“konstantní” optimální řízení);

q_4 ovlivňuje celkovou dynamiku jen celkovým škálováním času;

$\frac{q_5}{q_2}$ je malý parametr;

Přesněji, [Rehák, Čelikovský, Papáček, 2008, TAC IEEE]:

$q_1 := 250.106\mu\text{Em}^{-2}\text{s}^{-1}$, $q_2 := 0.301591$, $q_3 := 0.000176498\text{s}^{-1}$,
 $q_4 := 0.483955\text{s}^{-1}$, $q_5 := 0.000298966$, $\frac{q_5}{q_2} = 0.00328689$.

Vzorce pro ustálený stav jsou také jednodušší:

$$x_{B_{ss}} = \frac{u^{*2}}{u^{*2} + u^*/q_2 + 1}, \quad x_{A_{ss}} = \frac{u^*}{q_2(1 + q_5)(u^{*2} + u^*/q_2 + 1)}.$$

Fotoinhibice

Málo světla není dobře, ale hodně také ne:

Křivka závislosti ustáleného produktu $x_{A_{SS}}$ na osvětlení je tzv. Haldanova křivka, říká se jí také Haldanův (statický) model; nebo také ustálená kinetika Haldanova typu.

Haldanova křivka stoupá monotónně z nuly v nule až na své maximum a poté monotónně klesá až k nule v $+\infty$.

Dynamický model fotoinhibice (PSF) je pak právě model (11) :

$$\frac{1}{q_4} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_2(1+q_5) & 0 \\ 0 & \frac{q_5}{q_2(1+q_5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} - u^* \begin{bmatrix} (1+q_5) & 1 \\ -q_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^* \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$J = q_2 q_3 (1+q_5) (t_f - t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_f} x_A(t) dt.$$

Integrace světelného účinku

Experimenty ukazují, že mikrořasa má v živném roztoku schopnost integrovat světelný účinek, tj. při velmi rychlém střídání světla a tmy odpovídá její růst konstantnímu průměrnému osvětlení.

Matematické vysvětlení: bilineární systém, věta o konvexifikaci pravé strany diferenciální inkluze.

$\dot{x} \in F(x) \rightarrow$ množina dosažitelných stavů $X(t, x_0)$

$\dot{x} \in \overline{\text{conv}F(x)} \rightarrow$ množina dosažitelných stavů $\overline{X(t, x_0)}$

[Čelikovský, Kybernetika, 1987 a 1988], konkrétní odhady přesnosti a algoritmus aproximace pro obecné bilineární systémy a vstup, [Papáček, Čelikovský, Ruiz a Štys, Kybernetika, 2007], odhady a algoritmus aproximace pro PSF model fotosyntézy a konstantní u .

Závěr: popsaný model zohledňuje experimentálně ověřené jevy.

Redukce metodou singulární perturbace

$$\frac{1}{q_4} \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_2(1+q_5) & 0 \\ 0 & \frac{q_5}{q_2(1+q_5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} - u^* \begin{bmatrix} (1+q_5) & 1 \\ -q_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^* \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tau = t \frac{q_5}{q_2^2} : \quad \frac{q_5}{q_2^2 q_4} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_2(1+q_5) & 0 \\ 0 & \frac{q_5}{q_2(1+q_5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} - u^* \begin{bmatrix} (1+q_5) & 1 \\ -q_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^* \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{q_4} \begin{bmatrix} \frac{q_5}{q_2^2} \frac{dx_A}{d\tau} \\ \frac{dx_B}{d\tau} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_2(1+q_5) & 0 \\ 0 & \frac{q_2}{1+q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} - u^* \begin{bmatrix} (1+q_5) & 1 \\ -q_2^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^* \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Redukce metodou singulární perturbace

$$(13) \quad \begin{aligned} x_A^S &= \frac{u^*(1-x_B^S)}{(u^*+q_2)(1+q_5)}, \\ \frac{dx_B^S}{dt} &= -\frac{q_4 q_5 x_B^S}{q_2(1+q_5)} + \frac{q_4 q_5 (1-x_B^S) u^{*2}}{(1+q_5)(u^*+q_2)}. \end{aligned}$$

Tvrzení

Nechť $x(t, x^0)$, $t \in \mathcal{I} := [t_0, t_1]$, je řešením (11) generovaným počáteční podmínkou $x^0(t_0) = (x_A^0, x_B^0)^\top \in \Delta^1$, viz (10) a nechť je dána omezená měřitelná funkce $u^*(t)$, $t \in \mathcal{I}$. Dále, nechť pro $U_{ap} \in [0, 1]$, $P > 0$, $D > 0$, $\varepsilon > 0$ a $\forall t \in \mathcal{I}$ platí:

$$(14) \quad \begin{aligned} \left| \frac{u^*(t)}{u^*(t)+q_2} - U_{ap} \right| &\leq D, \quad \left| x_A^0 - U_{ap} \frac{1-x_B^0}{1+q_5} \right| \leq P, \\ t_1 - t_0 &> T(\varepsilon) = (D+1)(q_2 q_4)^{-1} \log(\varepsilon^{-1} K(P - \bar{K})), \end{aligned}$$

Redukce metodou singulární perturbace

Tvrzení

$$(15) \quad \tilde{K} = \sqrt{2q_5^2 + 6q_5 + 5}, \quad \bar{K} = \max \left\{ D + q_5, q_5 \frac{(D+1)^2}{4q_2^2} \right\}.$$

Předpokládejme, že $q_{2,3,4,5} > 0$, $q_2 < 1$. Potom existuje řešení $x^S(t, \tilde{x}^0)$, $x^S := (x_A^S, x_B^S)^\top$ rovnic (13) takové, že pro všechna $\varepsilon > 0$ a $P > \bar{K}$ platí

$$(16) \quad \|x^S(t, \tilde{x}^0) - x(t, x^0)\| < \tilde{K}(\bar{K} + D) + \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon).$$

Navíc, pokud $P \leq \bar{K}$, potom platí

$$\|x^S(t, \tilde{x}^0) - x(t, x^0)\| < \tilde{K}(\bar{K} + D) \quad \forall t \geq t_0.$$

Redukce metodou singulární perturbace

Důsledek

Předpokládejme, že platí všechny předpoklady Tvzení 3 s výjimkou toho, že U_{ap} je nahrazeno počástech spojitou funkcí $U_{ap}(t) \in [0, 1] \forall t \in \mathcal{I}$ takovou, že její skoky v nespojitostech jsou v absolutní hodnotě menší než $E > 0$ a časové úseky mezi jednotlivými skoky jsou delší než $\Delta T := (D + 1)(q_2 q_4)^{-1} \log(2)$. Potom pro $P > \bar{K}$ platí $\forall t \geq t_0 + T(\varepsilon)$

$$(17) \quad \|x^S(t, \tilde{x}^0) - x(t, x^0)\| < \tilde{K}(\bar{K} + D + 2E) + \varepsilon.$$

Navíc, pokud $P \leq \bar{K}$, potom platí

$$\|x^S(t, \tilde{x}^0) - x(t, x^0)\| < \tilde{K}(\bar{K} + D + 2E) \quad \forall t \geq t_0.$$

Redukce metodou singulární perturbace

Metoda singulární perturbace tedy aproximuje dobře i systémy s nespojitými vstupy, pokud jsou hodnoty jejich skoků omezené a čas mezi nimi dostatečně velký.

Minimální povolená doba mezi skoky ΔT je pro dané hodnoty q_2, q_4 zhruba rovna $\Delta T \approx (D + 1)4.8s$, zatímco $K \approx 5, \bar{K} \approx \max\{D + 0.003, 0.0003\}$.

Na aproximaci má vliv hodnota $u^*(t)/(u^*(t) + q_2)$, nikoliv sám vstup $u^*(t)$.

Typické optimalizační produkční běhy: cca 10^5s .

Jedná se tedy o rozumnou míru aproximace, i když z čistě teoretického hlediska to neumožní optimalitu dokázat, neboť nelze vyloučit, že optimální řízení se mění ještě mnohem rychleji, než je přípustá mez platnosti aproximace redukci.

Optimalizace jedno-dimensionální redukce

$$(18) \quad J = \int_0^T (x_1 - 1) \frac{u(t)}{u(t) + L} dt \mapsto \min, \quad u(t) \in [0, U],$$

$$(19) \quad \dot{x}_1 = -\frac{K}{L}x_1 + \frac{(1 - x_1)u^2}{u + L}K, \quad x_1(0) = x_1^0 \in [0, 1],$$

$$(20) \quad K := q_4 q_5 (1 + q_5)^{-1}, \quad L := q_2.$$

$$(21) \quad \mathcal{H} = -\frac{u(x_1 - 1)}{u + L} + \psi_1 K \left(\frac{(1 - x_1)u^2}{u + L} - \frac{1}{L}x_1 \right),$$

$$(22) \quad \dot{\psi}_1 = \frac{u}{u + L} + \psi_1 \left(\frac{K}{L} + u \frac{u}{u + L} K \right), \quad \psi_1(T) = 0.$$

$$(23) \quad u^o(t) = \alpha(\psi_1(t)), \quad \alpha(\psi_1) = \min \left\{ -L + \sqrt{L^2 - \frac{L}{K\psi_1}}, U \right\},$$

kde $\psi_1(t)$ je řešení (22) s $u = \alpha(\psi_1)$.

Optimalizace jedno-dimensionální redukce

Tvrzení

Optimální řízení (23) roste na intervalu $[0, T - T^{\text{sat}}]$, zatímco na intervalu $[T - T^{\text{sat}}, T]$ platí $u(t) \equiv U$. Navíc, délka saturované části T^{sat} nezávisí na T , a dokonce platí

$$T^{\text{sat}} = \frac{L(U + L)}{K(U + L + LU^2)} \log \left(\frac{U^2(U + 2L)}{(U^2 - 1)(U + L)} \right).$$

Optimální řízení nezávisí na počátečním stavu.

Tvrzení

Nechť $u_T^o(t)$ je optimální řízení (23) na pevném časovém úseku $[0, T]$ a předpokládejme, že $U \geq 1$. Potom:

$$\forall \epsilon, \tilde{T} > 0, \exists T(\epsilon, \tilde{T}) > 0: |u_{T(\epsilon, \tilde{T})}^o(t) - 1| \leq \epsilon, \forall t \in [0, \tilde{T}].$$

Optimalizace jedno-dimensionální redukce

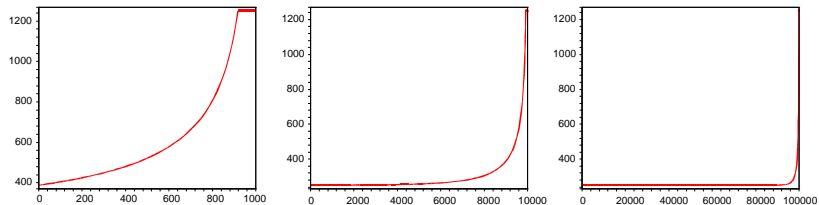


Figure: Optimální řízení redukce v $\mu\text{E m}^{-2}\text{s}^{-1}$; čas je v s.

Závěr

- Úvod do PMP.
- Popsán dynamický model PSF a jeho vlastnosti.
- Optimální řízení pomocí aproximace jedno-dimensionální redukci.
- Optimální produkce konverguje se vzrůstající délkou časového intervalu ke konstantě.
- Prozkoumána hypotéza z biotechnologické literatury.

Odkazy

- Celikovský S.: On the representation of trajectories of bilinear systems and its applications, *Kybernetika*, 23 (1987), 198-213.
- Celikovský S.: On the continuous dependence of trajectories of bilinear systems on controls and its applications, *Kybernetika*, 24 (1988), 278-292.
- Papacek S., Celikovský S., Stys D., Ruiz Leon J.: Bilinear system as a modelling framework for analysis of microalgal growth, *Kybernetika*, 43 (2007), 1- 20.
- Rehak B., Celikovský S., Papacek S.: Model for Photosynthesis and Photoinhibition: Parameter Identification Based on the Harmonic Irradiation 02 Response Measurement, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53 (2008), 101-108.
- Celikovský S., Papacek S., Cervantes-Herrera A., Ruiz-Leon J.: Singular Perturbation Based Solution to Optimal Microalgal Growth Problem and Its Infinite Time Horizon Analysis, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55 (2010), 767-772.

Děkuji za pozornost!