

HDMR znovu zasahuje

aneb o implicitní aproximaci v teorii rozhodování

Miroslav Pištěk

Oddělení adaptivních systémů, ÚTIA AV ČR, v.v.i.

e-mail: miroslav.pistek@gmail.com

Teorie rozhodování

Základní otázka teorie rozhodování zní:

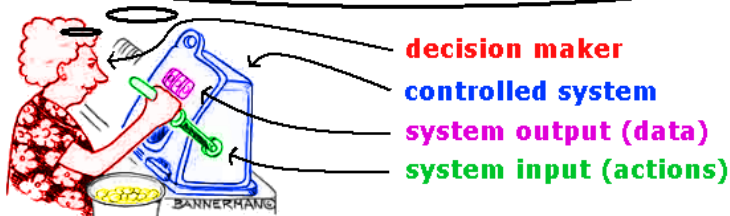
Jak kontrolovat neznámý dynamický systém?



Teorie rozhodování

Základní otázka teorie rozhodování zní:

Jak kontrolovat neznámý dynamický systém?



Stochastické dynamické programování

Formálně:

T časový horizont úlohy, $t \in \{1, \dots, T\}$

y_t data pozorovaná v okamžiku t

a_t akce zvolená v okamžiku t

d_t část trajektorie systému $d_t \equiv \{y_t, a_t, \dots, y_1, a_1\}$ odpovídající našim znalostem v čase t

Kritérium úlohy je zadané pomocí aditivní ztrátové funkce

$$Z(d_T) \equiv \sum_{t=1}^T z_t(a_t, y_t)$$

Bellmanova rovnice

Předpokládáme znalost **vnějšího modelu** $f(y_t|a_t, d_{t-1})$ systému pro všechny časy $t < T$.

Bellmanova rovnice

Předpokládáme znalost vnějšího modelu $f(y_t|a_t, d_{t-1})$ systému pro všechny časy $t < T$.

Pak se optimální strategie skládá z akcí minimalizujících funkci

$$V_{t-1}(d_{t-1}) = \min_{a_t \in A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) | a_t, d_{t-1}]$$

ve všech časech $t < T$.

Právě taková strategie minimalizuje celkovou očekávanou ztrátu.

Bellmanova rovnice

Předpokládáme znalost vnějšího modelu $f(y_t|a_t, d_{t-1})$ systému pro všechny časy $t < T$.

Pak se optimální strategie skládá z akcí minimalizujících funkci

$$V_{t-1}(d_{t-1}) = \min_{a_t \in A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) | a_t, d_{t-1}]$$

ve všech časech $t < T$.

Právě taková strategie minimalizuje celkovou očekávanou ztrátu.

Rovnice je však pro reálné problémy **neupočítatelná**.

High Dimensional Model Representation (HDMR)

HDMR aproximace funkce $g(x_1, \dots, x_m)$ má tvar

$$\tilde{g}(x) \equiv \tilde{g}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{g}_{ij}(x_i, x_j)$$

High Dimensional Model Representation (HDMR)

HDMR aproximace funkce $g(x_1, \dots, x_m)$ má tvar

$$\tilde{g}(x) \equiv \tilde{g}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{g}_{ij}(x_i, x_j)$$

Např. $g(x_1, x_2, x_3)$ tedy bude aproximováno takto

$$g(x_1, x_2, x_3) \approx \tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{g}_{12}(x_1, x_2) + \tilde{g}_{13}(x_1, x_3) + \tilde{g}_{23}(x_2, x_3)$$

High Dimensional Model Representation (HDMR)

HDMR aproximace funkce $g(x_1, \dots, x_m)$ má tvar

$$\tilde{g}(x) \equiv \tilde{g}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{g}_{ij}(x_i, x_j)$$

Např. $g(x_1, x_2, x_3)$ tedy bude aproximováno takto

$$g(x_1, x_2, x_3) \approx \tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{g}_{12}(x_1, x_2) + \tilde{g}_{13}(x_1, x_3) + \tilde{g}_{23}(x_2, x_3)$$

Komponenty rozkladu \tilde{g}_{ij} minimalizující $\|g(x) - \tilde{g}(x)\|_{L^2}$ získáme vyřešením **lineárních rovnic/projekcí**.

Plně pravděpodobnostní návrh rozhodování (FPD)

Optimální strategie je zde definována jako minimizér

$$\mathcal{D}(f \parallel \mathbb{I}f) \equiv \int f(x) \log \left(\frac{f(x)}{\mathbb{I}f(x)} \right) dx$$

Plně pravděpodobnostní návrh rozhodování (FPD)

Optimální strategie je zde definována jako minimizér

$$\mathcal{D}(f \parallel l^l f) \equiv \int f(x) \log \left(\frac{f(x)}{l^l f(x)} \right) dx$$

Při použití $dY_t \equiv f(y_t | a_t, d_{t-1}) dy_t$ a $dA_t \equiv l^l f(a_t | d_{t-1}) da_t$ vypadá rovnice pro optimální řízení následovně

$$\omega_\gamma(a_t, d_{t-1}) = \omega(a_t, d_{t-1}) - \int \log \left[\int \exp[-\omega_\gamma(a_{t+1}, d_t)] dA_{t+1} \right] dY_t$$

Optimální strategii $f(a_t | d_{t-1})$ pak lze odvodit ze znalosti ω_γ .

Aproximace FPD s využitím HDMR

S pomocí Jensenovy nerovnosti pro konkávní funkci $\log(\cdot)$ jsme našli lineární integrální rovnice pro horní i dolní mez ω_γ

$$\underline{\omega}_\gamma \leq \omega_\gamma \leq \bar{\omega}_\gamma$$

určené rovnicemi

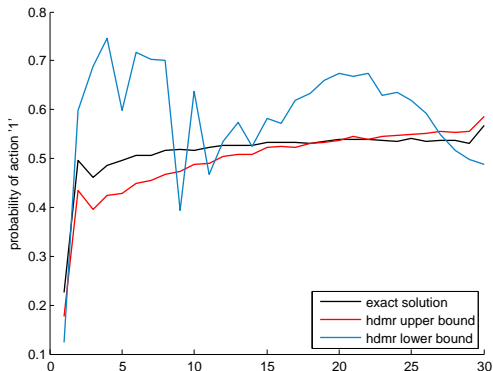
$$\bar{\omega}_\gamma(a_t, d_{t-1}) = \omega(a_t, d_{t-1}) + \int \int \bar{\omega}_\gamma(a_{t+1}, d_t) dA_{t+1} dY_t$$

$$\underline{\omega}_\gamma \equiv -\log(\bar{\Omega}_\gamma)$$

kde pro $\bar{\Omega}_\gamma$ platí

$$\bar{\Omega}_\gamma(a_t, d_{t-1}) = \Omega(a_t, d_{t-1}) \int \int \bar{\Omega}_\gamma(a_{t+1}, d_t) dA_{t+1} dY_t$$

Výsledky experimentu



Obrázek: Strategie odvozené z HDMR rozkladů horního a dolního odhadu $\underline{\omega}_\gamma$, resp. $\bar{\omega}_\gamma$, porovnané s optimální strategií ω_γ .

Vztah FPD k Bellmanově rovnici

Jak porovnat předchozí aproximaci FPD s ostatními metodami?

Vztah FPD k Bellmanově rovnici

Jak porovnat předchozí aproximaci FPD s ostatními metodami?

Zkusme pro $\lambda > 0$ "fyzikální" ansatz:

$$f(a_t | y_{t-1}, a_{t-1}) \simeq \exp(-\lambda z_t(y_{t-1}, a_{t-1}))$$

Bellmanova rovnice pak přejde v rovnici

$$\omega_\gamma(a_t, d_{t-1}) = \lambda \bar{z}_t(a_t, d_{t-1}) - \int \log \left[\int \exp[-\omega_\gamma(a_{t+1}, d_t)] da_{t+1} \right] dY_t$$

která se při $\lambda \rightarrow \infty$ blíží přesné Bellmanově rovnici.

Linearizace Bellmanovy rovnice

Díky této analogii můžeme oba odhady přenést do klasického rámce.

Spodní odhad přejde v triviální nerovnost $0 \leq V_t$ a pro horní odhad $V_t \leq U_t$ odvodíme:

$$V_{t-1}(d_{t-1}) = \min_{a_t \in A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}]$$

Linearizace Bellmanovy rovnice

Díky této analogii můžeme oba odhady přenést do klasického rámce.

Spodní odhad přejde v triviální nerovnost $0 \leq V_t$ a pro horní odhad $V_t \leq U_t$ odvodíme:

$$V_{t-1}(d_{t-1}) = \min_{a_t \in A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}]$$

$$V_{t-1}(d_{t-1}) \leq \frac{1}{|A_t|} \int_{A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}] da_t$$

Linearizace Bellmanovy rovnice

Díky této analogii můžeme oba odhady přenést do klasického rámce.

Spodní odhad přejde v triviální nerovnost $0 \leq V_t$ a pro horní odhad $V_t \leq U_t$ odvodíme:

$$\begin{aligned} V_{t-1}(d_{t-1}) &= \min_{a_t \in A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}] \\ V_{t-1}(d_{t-1}) &\leq \frac{1}{|A_t|} \int_{A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}] da_t \\ U_{t-1}(d_{t-1}) &\equiv \frac{1}{|A_t|} \int_{A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + U_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}] da_t \end{aligned}$$

Linearizace Bellmanovy rovnice

Díky této analogii můžeme oba odhady přenést do klasického rámce.

Spodní odhad přejde v triviální nerovnost $0 \leq V_t$ a pro horní odhad $V_t \leq U_t$ odvodíme:

$$\begin{aligned} V_{t-1}(d_{t-1}) &= \min_{a_t \in A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}] \\ V_{t-1}(d_{t-1}) &\leq \frac{1}{|A_t|} \int_{A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + V_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}] da_t \\ U_{t-1}(d_{t-1}) &\equiv \frac{1}{|A_t|} \int_{A_t} \mathcal{E} [z_t(y_t, a_t) + U_t(y_t, a_t, d_{t-1}) \mid a_t, d_{t-1}] da_t \end{aligned}$$

Na tuto **lineární** rovnici lze opět přímočaře aplikovat HDMR

Výsledky

docela dobré...

Výsledky

Nicméně, sám bych se neodvažoval v reálné aplikaci použít aproximaci spočívající na odhadu

$$\min_{x \in X} f(x) \leq \frac{1}{|X|} \int_X f(x) dx$$

Takže se vracíme na začátek: nešlo by použít HDMR zcela bez linearizace?

Minimalizace přesné Bellmanovy rovnice

Máme funkci $F(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ v HDMR tvaru:

$$F(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) \equiv \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q f_{ij}(u_i, v_j) + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}(v_i, v_j)$$

A pro všechna $[u_1, u_2, \dots, u_p]$ hledáme funkci $G(u_1, u_2, \dots, u_p)$ definovanou takto

$$G(u_1, u_2, \dots, u_p) \equiv \min_{v_1, \dots, v_q} F(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$$

Minimalizace přesné Bellmanovy rovnice

Je tedy třeba opakovaně řešit podobnou úlohu, např.

$$G(1, 1, \dots, 1) = \min_{v_1, \dots, v_q} \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^q f_{ij}(1, v_j) + \sum_{j=1}^q f_{pj}(1, v_j) + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}(v_i, v_j)$$

$$G(1, 1, \dots, 2) = \min_{v_1, \dots, v_q} \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^q f_{ij}(1, v_j) + \sum_{j=1}^q f_{pj}(2, v_j) + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}(v_i, v_j)$$

...

Rekurzivní řešení problému

Úlohu se vyplatí rozdělit na menší úlohy stejného typu.

V prvním kroku takto:

$$\min_{v_1, \dots, v_q} \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^q f_{ij}(u_i, v_j)$$

$$\min_{v_1, \dots, v_q} \sum_{j=1}^q f_{pj}(u_i, v_j)$$

$$\min_{v_1, \dots, v_q} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij}(v_i, v_j)$$

Víceúrovňová halda

Nakonec se dostaneme k jednotlivým komponentám $f_{ij}(u_i, v_j)$,
resp. $g_{ij}(v_i, v_j)$.

Nepotřebujeme setřídít jejich celý definiční obor, stačí najít
minumim a pár dalších nejmenších prvků.

Víceúrovňová halda

Nakonec se dostaneme k jednotlivým komponentám $f_{ij}(u_i, v_j)$, resp. $g_{ij}(v_i, v_j)$.

Nepotřebujeme setřídít jejich celý definiční obor, stačí najít minimum a pár dalších nejmenších prvků.

Nad každou komponentou postavíme *haldu* a ty postupně slučujeme na větší definiční obory.

Víceúrovňová halda

Nakonec se dostaneme k jednotlivým komponentám $f_{ij}(u_i, v_j)$, resp. $g_{ij}(v_i, v_j)$.

Nepotřebujeme setřídít jejich celý definiční obor, stačí najít minimum a pár dalších nejmenších prvků.

Nad každou komponentou postavíme *haldu* a ty postupně slučujeme na větší definiční obory.

UNDER CONSTRUCTION